2. Να βρεθεί η πλάγια στο +∞ ασύμπτωτη του διαγράμματος της συνάρτησης f, με $f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

Λύση: Είναι: $\alpha=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{x}e^{\frac{1}{x}}=1\cdot e^0=1$ και

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\alpha x]=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\left[(x+2)e^{\frac{1}{x}}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x(e^{\frac{1}{x}}-1)+2e^{\frac{1}{x}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)+2\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)+2e^0=2+\lim_{x\to+\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)\overset{x=\frac{1}{\omega}}{=\!=\!=}$$

$$=2+\lim_{\omega\to0^+}\frac{1}{\omega}(e^{\omega}-1)=2+\lim_{\omega\to0^+}\frac{e^{\omega}-1}{\omega}=2+1=3$$

Επομένως η ευθεία $\psi=x+3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο +∞.

3. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση f, με $f(x)=1-2\ln x-\frac{x^3}{3}$ δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

Απόδειξη: Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}_+^*$, επομένως δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στην περιοχή του -∞. Είναι:

$$\alpha=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-2\frac{\ln x}{x}-\frac{x^2}{3}\right)=0-2\cdot0-(+\infty)=-\infty$$

Επομένως η f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στην περιοχή του +∞.

4. Να δειχθεί ότι το διάγραμμα της συνάρτησης f, με:

$$f(x)=\begin{cases} x(\ln x)^2, & \text{αν } x>0\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$$

δεν έχει ασύμπτωτες.

Απόδειξη: Η f ορίζεται στο $[0,+\infty)$, άρα δεν έχει ασύμπτωτες στην περιοχή του -∞.

α) Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x(\ln x)^2=+\infty$, δεν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη στο +∞.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x(\ln x)^2=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(\ln x)^2}{\frac{1}{x}}=0$. Επομένως δεν υπάρχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

γ) Επειδή είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^2=+\infty$, δεν υπάρχει ούτε πλάγια ασύμπτωτη.

5. Δίνεται η συνάρτηση f: $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\longrightarrow \mathbf{R}$, με $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες του διαγράμματος της.

Λύση: α) Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x^2-1})=\lim_{x\to+\infty} x\left[1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right]=+\infty$$

Επομένως δεν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Επειδή $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-1})=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2+1}{x-\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=0\,\frac{1}{2}=0.$$

η ευθεία $\psi=0$, είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

β) Υποθέτουμε ότι η ευθεία $x=\xi$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη. Είναι:

$$\lim_{x\to\xi^+} f(x)=\lim_{x\to\xi^+}(x+\sqrt{x^2-1})=\xi+\sqrt{\xi^2-1}\neq\pm\infty$$

και $$\lim_{x\to\xi^-} f(x)=\xi+\sqrt{\xi^2-1}\neq\pm\infty$$

Επομένως δεν υπάρχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

γ) Έχουμε:

$$\alpha=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=2$$

και $\beta=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-2x]=\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x^2-1}-2x)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$

Άρα η ευθεία $\psi=2x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Ακόμα είναι:

$$\alpha=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=0$$

Άρα δεν υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη στην περιοχή του $-\infty$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f: A \longrightarrow R$, με $f(x)=\frac{3x}{2}\ln\left(e-\frac{1}{3x}\right)$.

α) Να δειχθεί ότι $A=(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{3e},+\infty\right)$.

β) Να βρεθεί η πλάγια ασύμπτωτος του διαγράμματος της f στην περιοχή του +∞.

Απόδειξη:

α) Πρέπει να είναι:

$$\begin{Bmatrix} x\neq 0 \\ e-\frac{1}{3x}>0 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} x\neq 0 \\ x(3xe-1)>0 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow x\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{3e},+\infty\right)$$

'Αρα $A=(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{3e},+\infty\right)$.

β) 'Εχουμε:

$$\alpha=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{2}\ln\left(e-\frac{1}{3x}\right)=\frac{3}{2}\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e-\frac{1}{3x}\right)\right]=\frac{3}{2}\ln e=\frac{3}{2}$$

και:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\alpha x]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x}{2}\ln\left(e-\frac{1}{3x}\right)-\frac{3}{2}x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{2}\left[\ln\left(e-\frac{1}{3x}\right)-\ln e\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{2}\ln\frac{e-\frac{1}{3x}}{e}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{2}\left[\ln\left(1-\frac{1}{3xe}\right)\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1-\frac{1}{3xe}\right)^{3x}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{3xe}\right)^{-3x}}=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}=\frac{1}{2}\ln e^{-\frac{1}{e}}=-\frac{1}{2e}$$

'Αρα $\alpha=\frac{3}{2}$ και $\beta=-\frac{1}{2e}$. Επομένως η ευθεία $\psi=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2e}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στην περιοχή του +∞.